CNAM Analyse et Calcul Matriciel - FOD 2021-2022

Devoir n°3 de Mathématiques

à remettre au plus tard le vendredi 17 juin

Exercice 1

La fonction f périodique de période 2 est définie sur $[-1, +1]$ par $f(x) = x - x^3$.

1. Représenter graphiquement f sur $[-3, +3]$. Quelle est la parité de f ?

2. Pourquoi f est-elle développable en série de Fourier ?
   Quelle est la somme de sa série de Fourier ?

3. Calculer les coefficients de Fourier et écrire la série de Fourier de f.

   On pourra admettre et utiliser la formule suivante (pour $\lambda \neq 0$) :

$$\int_{-1}^{+1} (t - t^3)\sin(\lambda t)\,dt = -\frac{12\cos\lambda}{\lambda^3} - \frac{4\sin\lambda}{\lambda^2} + \frac{12\sin\lambda}{\lambda^4}$$

4. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire $S = \sum_{p \geqslant 1} \frac{(-1)^p}{(2p-1)^3}$.

Exercice 2

On considére la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| \leqslant 1 \\ 2 - |t| & \text{si} \quad 1 \leqslant |t| \leqslant 2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| \geqslant 2 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[-3, 3]$.

2. Calculer sa transformée de Fourier directement (en utilisant la définition).

3. Retrouver le résultat de la question précédente en écrivant f comme somme de trois fonctions triangle. Vérifier votre résultat en utilisant les transformées de Fourier de trois fonctions triangles : la fonction triangle centrée en 0, sa retardée de $+1$ et sa retardée de -1.

Exercice 3

On considère les fonction f et g définies par $f(t) = u(t)t$ et $g(t) = \frac{f(t)t}{2}$, avec

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Laplace $L(f)(p)$ en précisant l'abcisse de convergence.

2. Déduire la transformée de Laplace $L(g)(p)$.

3. Utiliser les résultats des deux questions précédentes pour résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = f(t) + g(t)$$

   avec $y(0) = y'(0) = 0$