

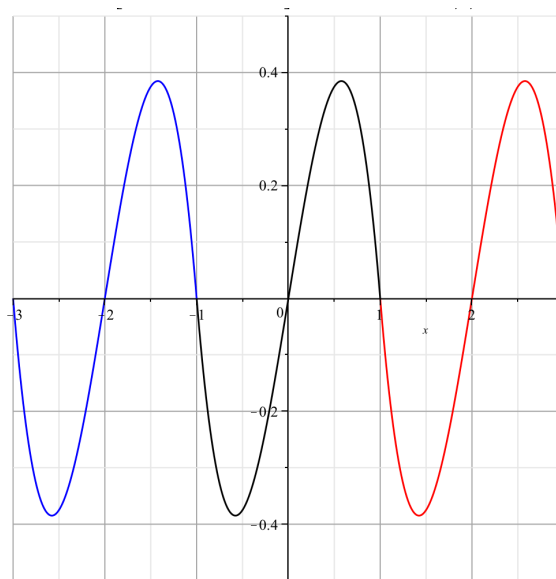
Éléments de correction du Devoir n°3

Exercice 1

La fonction f périodique de période 2 est définie sur $[-1, +1]$ par $f(x) = x - x^3$.

1. Représenter graphiquement f sur $[-3, +3]$. Quelle est la parité de f ?

La fonction f est un polynôme défini sur $[-1; +1]$ qui se répète de façon périodique. Une rapide étude sur $]-1; +1[$ montre que c'est une fonction impaire qu'on peut dériver sur $]-1; +1[$ en $f'(x) = 1 - 3x^2$. Cette dérivée s'annule deux fois sur $]-1; +1[$ en $-1/\sqrt{3}$ et en $1/\sqrt{3}$, on en déduit donc la représentation graphique (en noir) de $f(x)$ sur $[-1; +1]$, qu'on "reporte" sur $[-3, -1]$ et $[1, +3]$.



Pour tout x réel on a bien $-x$ réel, par périodicité on peut trouver k entier relatif tel que $-x + 2k \in [-1; +1]$ et $f(-x) = f(-x + 2k)$, on a alors :

$$f(-x) = f(-x + 2k) = (-x + 2k) - (-x + 2k)^3 = -(x - 2k) + (x - 2k)^3 = (x - 2k) - (x - 2k)^3 = f(x)$$

et f est impaire.

2. Pourquoi f est-elle développable en série de Fourier ?

Comme précisé dans la première question f est un polynôme sur $[-1; +1]$ qui se répète de façon périodique, c'est donc une fonction C^1 par morceaux.

De manière graphique on remarque même qu'elle est en fait dérivable sur \mathbb{R} , en effet aux extrémités de $[-1; +1]$, on a :

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 = f(-1) = f(1)$ donc f est continue sur \mathbb{R}
- de même $f'_d(-1) = f'_g(1) = -2 = f'_d(1) = f'_g(-1)$

La fonction vérifie donc toutes les hypothèses du théorème de Dirichlet, et le développement en série de Fourier de f est une série convergente.

Quelle est la somme de sa série de Fourier ?

Comme de plus f est continue sur \mathbb{R} la somme de la série de Fourier en tout x réel est $f(x)$: $\forall x \in \mathbb{R} \quad S_f(x) = f(x)$.

3. Calculer les coefficients de Fourier et écrire la série de Fourier de f .
 La fonction étant impaire tous les coefficients réels a_n pour $n \geq 0$ sont nuls.
 Pour les b_n ($n \geq 1$) on applique la formule :

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\Delta T} f(x) \sin(n \omega x) dx$$

où

- $T = 2$ est la période de f ,
- ΔT est un intervalle d'amplitude T , ici on choisit $\Delta T = [-1; 1]$,
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation.

on en déduit :

$$b_n = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 f(x) \sin(n \pi x) dx$$

mais comme f est impaire et $\Delta T = [-1; 1]$, on peut écrire :

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n \pi x) dx$$

On peut alors faire une double intégration par partie, en prenant pour fonction à dériver le polynôme $f(x) = x - x^3$ où utiliser la formule donnée dans le texte en posant $\lambda = n \pi$:

On pourra admettre et utiliser la formule suivante (pour $\lambda \neq 0$) :

$$\int_{-1}^{+1} (t - t^3) \sin(\lambda t) dt = -\frac{12 \cos \lambda}{\lambda^3} - \frac{4 \sin \lambda}{\lambda^2} + \frac{12 \sin \lambda}{\lambda^4}$$

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n \pi x) dx = -\frac{12 \cos(n \pi)}{(n \pi)^3} - \frac{4 \sin(n \pi)}{(n \pi)^2} + \frac{12 \sin(n \pi)}{\lambda^4}$$

On en déduit :

$$b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin(n \pi x) dx = -\frac{12(-1)^n}{(n \pi)^3} = 12 \frac{(-1)^{n+1}}{(n \pi)^3}$$

et finalement

$$S_f(x) = \sum_{n \geq 1} 12 \frac{(-1)^{n+1}}{(n \pi)^3} \sin(n \pi x)$$

4. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{8}\right).$$

$$\text{En déduire } S = \sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{(2p-1)^3}.$$

D'après une question précédente f vérifie toutes les hypothèses du théorème de Dirichlet et est une fonction continue on en déduit :

$$S_f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} 12 \frac{(-1)^{n+1}}{(n \pi)^3} \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{3}{8}\right)$$

Mais si $n = 2p$, $\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2p \frac{\pi}{2}\right) = 0$, on en déduit que seuls les termes de rang impairs ne s'annulent pas :

$$\sum_{p \geq 1} 12 \frac{(-1)^{2p}}{(2p-1)^3 \pi^3} \sin\left((2p-1) \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \sum_{p \geq 1} 12 \frac{1}{(2p-1)^3 \pi^3} (-1)^{p-1} = \frac{3}{8}$$

on en déduit :

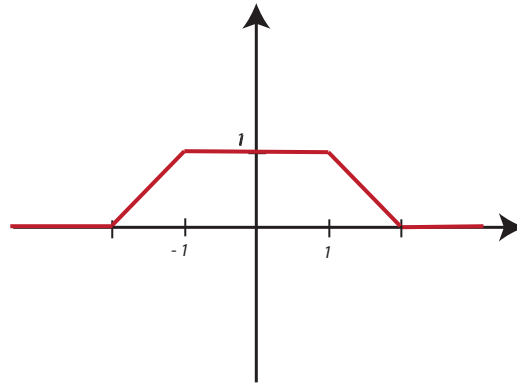
$$\sum_{p \geq 1} \frac{(-1)^p}{(2p-1)^3} = -\frac{3 \pi^3}{12.8} = -\frac{\pi^3}{32}$$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq 1 \\ 2 - |t| & \text{si } 1 \leq |t| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 2 \end{cases}$$

1. On a immédiatement la représentation du signal $f(t)$:



2. Calculer sa transformée de Fourier sachant que la fonction est paire, on a :

$$\hat{f}(y) = \int_{-2}^2 f(t) \cos(2\pi ty) dt = 2 \int_0^2 f(t) \cos(2\pi ty) dt$$

dans notre cas :

$$\hat{f}(y) = 2 \int_0^1 \cos(2\pi ty) dt + 2 \int_1^2 (2-t) \cos(2\pi ty) dt$$

La première intégrale se calcule directement, pour la deuxième on doit faire une intégration par partie, en posant :

$$\begin{aligned} u(t) &= 2 - t & u'(t) &= -1 \\ v'(t) &= \cos(2\pi ty) & v(t) &= \frac{\sin(2\pi ty)}{2\pi y} \quad (\text{pour } y \neq 0) \end{aligned}$$

on obtient, pour $y \neq 0$:

$$\hat{f}(y) = 2 \left[\frac{\sin(2\pi ty)}{2\pi y} \right]_0^1 + 2 \left[(2-t) \frac{\sin(2\pi ty)}{2\pi y} \right]_1^2 + 2 \int_1^2 \frac{\sin(2\pi ty)}{2\pi y} dt$$

ou encore :

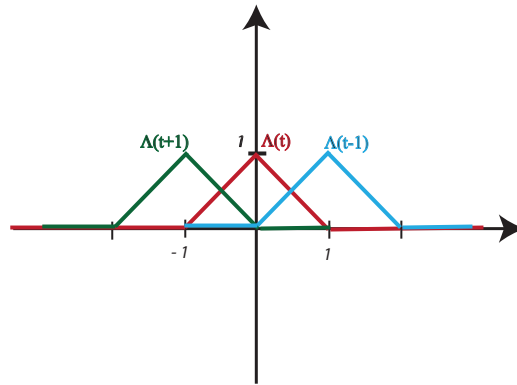
$$\hat{f}(y) = \left[\frac{\sin(2\pi ty)}{\pi y} \right]_0^1 + \left[(2-t) \frac{\sin(2\pi ty)}{\pi y} \right]_1^2 + 2 \left[\frac{-\cos(2\pi ty)}{(2\pi y)^2} \right]_1^2$$

finalement :

$$\hat{f}(y) = \frac{\cos(2\pi y) - \cos(4\pi y)}{2\pi^2 y^2}$$

3. La fonction f peut facilement s'écrire comme somme de fonctions triangles :

$$f(t) = \Lambda(t) + \Lambda(t-1) + \Lambda(t+1)$$



en utilisant les formules sur le retard, on en déduit :

$$\mathcal{F}(f(t))(y) = \mathcal{F}(\Lambda(t))(y) + e^{2i\pi y} \mathcal{F}(\Lambda(t))(y) + e^{-2i\pi y} \mathcal{F}(\Lambda(t))(y)$$

c'est--dire :

$$\hat{f}(y) = (1 + e^{2i\pi y} + e^{-2i\pi y}) \mathcal{F}(\Lambda(t))(y)$$

ou :

$$\hat{f}(y) = (1 + 2 \cos(2\pi y)) \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \right)^2$$

On doit donc vérifier :

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \frac{\cos(2\pi y) - \cos(4\pi y)}{2\pi^2 y^2} = (1 + 2 \cos(2\pi y)) \left(\frac{\sin(\pi y)}{\pi y} \right)^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos(2\pi y) - \cos(4\pi y)}{2} = (1 + 2 \cos(2\pi y)) (\sin(\pi y))^2 \end{aligned}$$

Mais $(\sin(\pi y))^2 = \frac{1 - \cos(2\pi y)}{2}$ donc

$$\begin{aligned} (1 + 2 \cos(2\pi y)) (\sin(\pi y))^2 &= \frac{(1 + 2 \cos(2\pi y))(1 - \cos(2\pi y))}{2} \\ &= \frac{1 + \cos(2\pi y) - 2 \cos^2(2\pi y)}{2} = \frac{\cos(2\pi y) - \cos(4\pi y)}{2} \end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 3

On considère les fonction f et g définies par $f(t) = u(t)t$ et $g(t) = \frac{f(t)t}{2}$, avec

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1. Calculer la transformée de Laplace $L(f)(p)$ en précisant l'abscisse de convergence.
Par le cours on sait que $L(f)(p) = \frac{1}{p^2}$ avec une abscisse de convergence nulle.

2. Dédurre la transformée de Laplace $L(g)(p)$.

On a $g(t) = \frac{f(t)t}{2}$ on en déduit

$$L(g)(p) = -\frac{1}{2}(L(f)(p))' = \frac{1}{p^3}$$

3. Utiliser les résultats des deux questions précédentes pour résoudre l'équation différentielle

$$y''(t) + y(t) = f(t) + g(t)$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$

Si on considère l'équation $y''(t) + y(t) = f(t) + g(t)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$, et si on note $Y(p)$ la transformée de Laplace d'une solution la transformée de Laplace de

- ▶ $y'(t)$ est $pY(p) - y(0^+) = pY(p)$
- ▶ celle de $y''(t)$ est $p^2Y(p) - py(0^+) - y'(0^+) = p^2Y(p)$

Par les questions précédentes et la linéarité de la transformée de Laplace, si on applique une transformation de Laplace à chacun des membres de l'équation différentielle on a donc :

$$p^2Y(p) + Y(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} \Leftrightarrow Y(p) = \frac{p+1}{p^3(p^2+1)}$$

Mais la décomposition en éléments simples de $\frac{p-1}{p^3(p^2+1)}$ est

$$\frac{p-1}{p^3(p^2+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{p-1}{p^2+1}$$

On a les originaux suivants :

- ▶ $u(t)$ est l'original de $\frac{1}{p}$
- ▶ $t u(t)$ est l'original de $\frac{1}{p^2}$
- ▶ $\frac{t^2}{2} u(t)$ est l'original de $\frac{1}{p^3}$
- ▶ $\cos(t) u(t)$ est l'original de $\frac{p}{p^2+1}$
- ▶ $\sin(t) u(t)$ est l'original de $\frac{1}{p^2+1}$

On en déduit que $y(t) = (-1 + t + \frac{t^2}{2} + \cos(t) - \sin(t))u(t)$ est la fonction recherchée.